

Solucions

A63. (Proposat per Pelegrí Viader, UPF) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua i $f(0) = f(1)$, demostreu que:

a) Per cada enter positiu n existeix una corda horitzontal del graf de f (una corda horitzontal és el segment que uneix dos punts del graf amb la mateixa ordenada] de longitud $1/n$.

b) Demostreu que f no té per què tenir necessàriament cordes horitzontals amb longitud que no sigui el recíproc d'un nombre enter.

(Teorema de la corda universal)

Solució: (Solució d'Enric Ventura, UPC) Si $f(0) = f(1/n)$ ja tenim la corda que busquem. En cas contrari, canviant f per $-f$ si cal, podem suposar que $f(0) < f(1/n)$. Mirem ara l'índex i que correspon al màxim dels nombres $f(0), f(1/n), \dots, f((n-1)/n), f(1)$. Com que $f(0) = f(1) < f(1/n)$, tindrem $i \neq 0, n$. Així, podem escriure les desigualtats

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f\left(\frac{i}{n}\right) \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Si una d'aquestes és una igualtat ja tenim la corda que busquem. En cas contrari,

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) < f\left(\frac{i}{n}\right) > f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Considerem ara la nova funció $g : [0, \frac{n-1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. És contínua perquè f ho era i, a més, $g(\frac{i-1}{n})$ i $g(\frac{i}{n})$ tenen signes contraris. Segons el teorema de Bolzano hi ha un punt $\alpha \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ en el qual $f(\alpha) - f(\alpha + \frac{1}{n}) = g(\alpha) = 0$. Aquí tenim, doncs, la corda horitzontal de longitud $\frac{1}{n}$ que buscàvem.

Per a l'apartat b), considerem la funció $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ determinada per:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 0,25 \\ -4x + 2, & \text{si } 0,25 < x \leq 0,75 \\ 4x - 4, & \text{si } 0,75 < x \leq 1 \end{cases}$$

el graf de la qual és la línia trencada que passa pels punts $(0, 0)$, $(0,25, 1)$, $(0,75, -1)$ i $(1, 0)$.

És clar que cordes horitzontals en els nivells positius només n'hi ha de longituds entre 0 i $\frac{1}{2}$. Igualment per a cordes dels nivells negatius. Pel que fa a cordes de nivell 0 només n'hi ha tres i són de longituds $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i 1. Per tant, aquesta funció no té cordes horitzontals de cap longitud superior a $\frac{1}{2}$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

En la *SCM/Notícies*, 19, vam publicar que Àngel Jorba i Amadeu Delshams eren els directors de la tesi de José Pablo Sánchez Casas quan el director va ser només Àngel Jorba. Disculpeu l'error.

En la *SCM/Notícies*, 18, pàgina 51, va sortir anunciada la recenció de la tesi de Josep Álvarez però, per error, el resum que apareixia a continuació corresponia a una altra tesi. En demanem disculpes i publiquem el resum correcte.

- JOSEP ÀLVAREZ MONTANER va llegir la seva tesi, dirigida per Santiago Zarzuela, titulada *Local cohomology modules supported on monomial ideals*, el dia 24 de maig de 2002. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

Sigui $R = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anell de polinomis amb coeficients en un cos k de característica zero. El nostre objectiu és, tot seguint la línia de recerca encetada per G. Lyubeznik, utilitzar en profunditat la teoria de \mathcal{D} -mòduls per tal d'estudiar els mòduls de cohomologia local de R amb suport un ideal $I \subseteq R$. En especial, ens interes-

sa descriure de manera efectiva l'anul·lació, les propietats de finitud i entendre millor l'estructura d'aquests mòduls. La principal eina que utilitzarem és un invariant que podem associar als mòduls de cohomologia local i més en general a tot \mathcal{D} -mòdul holònom: el cicle característic.

En primer lloc, demostrem que les multiplicitats del cicle característic dels mòduls de cohomologia local són invariants de l'anell quocient R/I . En el cas dels ideals monomials, aquests invariants ens permeten descriure les resolucions lliures minimal i les propietats aritmètiques de R/I . També descriuen la cohomologia del complementari dels arranjaments de varietats lineals.

Seguidament donem una fórmula explícita pel càlcul del cicle característic dels mòduls de cohomologia local amb suport un ideal mono-

mial. Aquesta fórmula ens permet donar una descripció del suport, l'anul·lació, els nombres de Bass i els primers associats d'aquests mòduls a partir de la descomposició primària minimal de l'ideal I .

Per acabar estudiem l'estructura dels mòduls de cohomologia local amb suport un ideal monomial tot utilitzant les següents eines: la filtració que s'obté de la degeneració de la successió espectral de Mayer-Vietoris, la correspondència de Riemann-Hilbert i la \mathbb{Z}^n -graduació associada a aquests mòduls.

- JUAN RAMÓN PACHA ANDÚJAR va llegir la seva tesi, dirigida per Mercè Ollé Torner i Jordi Villanueva Castellort, titulada *On the quasiperiodic hamiltonian Andronov-Hopf bifurcation*, el dia 21 d'octubre de 2002. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquest treball se situa dintre del marc dels sistemes dinàmics hamiltonians de tres graus de llibertat. Allà considerem famílies d'òrbites periòdiques amb una transició estable - complex inestable. Així, si L és el paràmetre que descriu la família, suposarem que per a valors d'aquest paràmetre més petits que un cert valor crític, L' , els multiplicadors característics de les òrbites periòdiques corresponents hi són sobre el cercle unitat; quan $L = L'$, aquests col·lisionen per parelles conjugades (òrbita ressonant o crítica) i per $L > L'$, els multiplicadors abandonen el cercle unitat cap al pla complex (col·lisió de Krein amb signatura oposada). El canvi d'estabilitat subseqüent es descriu a la literatura com *transició estable-complex inestable*. Tanmateix, a partir d'estudis numèrics, és coneguda l'aparició (sota condicions d'incommensurabilitat) de fenòmens de bifurcació quasiperiòdica; més concretament, és conegut el desplegament de famílies de tors 2-dimensionals, de manera que el patró d'aquesta bifurcació s'assembla a la (clàssica) bifurcació d'Andronov-Hopf, en el sentit que hi sorgeixen objectes linealment estables (tors-2D el·líptics) *al voltant* d'objectes inestables de dimensió més baixa: òrbites periòdiques (bifurcació directa); i recíprocament, apareixen tors inestables (hiperbòlics) *al voltant* d'òrbites periòdiques linealment estables (bifurcació inversa).

El nostre objectiu és descriure la dinàmica local en un entorn de l'òrbita periòdica res-

sonant per tal de provar, analíticament, l'existència dels tors invariants bifurcats. Això ho portem a terme mitjançant l'anàlisi següent.

a) Primer de tot obtenim, d'una manera constructiva (això és, donant algorismes), una forma normal ressonant en un entorn de l'òrbita periòdica crítica. Aquesta forma normal la portem fins a qualsevol ordre arbitrari, r . Així, mitjançant aquests algorismes, es descriuen els canvis que transformen el hamiltonià inicial en la suma d'una part integrable —la forma normal *per se*— més una resta no integrable. A partir d'aquí, podem estudiar la dinàmica de la forma normal, prescindint dels altres termes i, amb aquest tractament (formal) del problema, som capaços d'identificar els paràmetres que governen tant l'existència de la bifurcació com la seva tipologia (directa, inversa). Cal remarcar que el que es fa fins aquí, no és només un procés qualitatiu, ja que a més ens permet derivar parametritzacions molt acurades dels tors i d'altres objectes rellevants des del punt de vista de la dinàmica; com per exemple —en el cas de la bifurcació inversa—, de les varietats invariants dels tors hiperbòlics.

b) A continuació, calculem acotacions *òptimes* per a la resta i d'aquí es conclou que, en un entorn de la ressonància, la part no normalitzada del hamiltonià transformat es pot considerar com una pertorbació de la forma normal. Esmentarem que les dificultats en aquest punt vénen del caràcter no semisimple de la ressonància estudiada. Això porta a equacions ho-

mològiques no diagonals, la qual cosa dificulta l'acotació de les seves solucions i conseqüentment, l'obtenció d'estimacions sobre el tamany de la resta.

c) Finalment, l'aplicació de mètodes de la teoria KAM ens permet establir que la majoria (excepte un conjunt de mesura petita, del mateix ordre que la resta de la forma normal) dels tors no pertorbats es preserven com a solucions del hamiltonià complet. Aquests mètodes són de tipus pertorbatiu —d'aquí la necessitat del punt b)— i es basen en la construcció d'un esque-

ma de convergència quadràtica capaç de contrarestar l'efecte dels petits divisors que apareixen a la forma normal. D'altra banda, algunes de les condicions *típiques* que s'imposen sobre les freqüències (intrínseques i normals) dels tors no pertorbats no estan ben definides en aquest problema concret, de manera que no s'ha pogut aplicar la teoria directament i ens ha calgut desenvolupar esquemes KAM específics.

Paraules clau: Bifurcation problems, perturbations, normal forms, small divisors, KAM theory. Classificació AMS: 37J20, 37J25, 37J40.

- SUSANA-C. LÓPEZ MASIP va llegir la seva tesi, dirigida per Anna Lladó, titulada *Descomposicions de grafs en arbres*, el dia 20 de febrer de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.



El treball d'aquesta tesi està dirigit a l'estudi del problema de les descomposicions de grafs en arbres. Una descomposició d'un graf és una família de subgrafs branca-disjunts, les branques dels quals recobren totes les branques del graf. Els tipus de descomposicions varien d'acord amb l'exigència de certes característiques en els subgrafs. Tradicionalment, els problemes de descomposició s'han classificat al voltant de tres eixos bàsics: l'estudi sobre la presència de determinats subgrafs com a elements d'una descomposició, l'estudi de les descomposicions minimal, és a dir, aquelles que admeten el mínim nombre possible de factors, i finalment, l'estudi de descomposicions en subgrafs isomorfs a un graf donat.

El primer eix s'emmarca dins el problema clàssic d'empaquetaments de grafs. En el capítol 2 tractem el problema de determinar en quines condicions un arbre arbitrari pot aparèixer en una descomposició minimal en arbres. Provem que, donat un arbre qualsevol T , sempre existeix un graf maximalment planari i un graf maximalment planari i bipartit que admet T en una descomposició minimal acíclica. A més, excepte en un cas, podem exigir que T sigui un arbre generador. Estudiem també els diferents tipus de descomposicions minimal que es poden presentar en aquestes famílies. En el cas dels grafs regulars, donem condicions necessàries i suficients per construir un graf regular d'ordre i grau mínims, tal que admeti T

en una descomposició minimal. En particular, provem que tot arbre d'ordre n forma part d'una descomposició minimal del graf complet de n vèrtexs.

Un gruix important dels articles que s'han publicat sobre descomposicions es dediquen a calcular el nombre mínim de subgrafs que formen una descomposició amb condicions prefixades. En els capítols 3 i 4 estudiem el nombre mínim d'arbres en una descomposició d'un graf G donat, que denotem per $\tau(G)$. No existeix a la literatura una fórmula pel càlcul del nombre d'arbres, i tots els treballs publicats fins al moment s'adrecen a donar cotes per a aquest paràmetre o a calcular-lo per a determinades famílies de grafs. Els grafs regulars constitueixen una de les famílies on s'ha estudiat el valor de $\tau(G)$. Lladó, Ringel i Serra demostren per a grafs d -regulars amb d parell i màxima branca-connectivitat, que $\tau(G) = a(G)$. En el capítol 3 considerem l'extensió d'aquest resultat per grafs regulars en general. Provem que tot graf d -regular amb $d \geq n/2$ verifica $a(G) = \tau(G)$. A més, provem que la cota inferior sobre el grau és òptima. La demostració en la situació crítica $d = n/2$ quan d és senar exigeix resultats més contundents sobre l'estructura dels conjunts amb reduït nombre de branques en la frontera. Acabem aquest capítol considerant els grafs regulars no densos. En particular, provem que tot graf regular d'ordre n amb grau $2\sqrt{n} \leq d < n/2$ i bona connectivitat manté la igualtat $\tau(G) = a(G)$.

En el capítol 4, utilitzant tècniques d'anàlisi diferents de les que s'han fet servir en el capítol anterior, provem que tot graf amb grau mínim $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ i ordre n verifica $a(G) = \tau(G)$. Provem que aquesta cota en el grau és òptima.

Finalment, en el capítol 5 estudiem el problema de descomposició del graf bipartit i complet $K_{n,n}$ en còpies isomorfes d'un arbre qualsevol T de mida n . Per tractar aquest problema introduïm un tipus d'etiquetament, que anomenem *bigraceful*, que s'adapta a l'estructura bipartida dels arbres. Donem eines que permeten l'obtenció d'arbres *bigraceful* i provem el caràcter *bigraceful* de diverses famílies d'arbres. Tal com succeeix amb d'altres problemes

similars d'etiquetaments, és impossible trobar una solució general. L'objectiu aleshores, s'adreça a trobar el menor n' que permeti assegurar que un arbre donat T descomposa $K_{n',n'}$. En aquesta línia, i millorant resultats coneguts, provem que tot arbre T amb n branques i radi r descomposa $K_{2nn,2hn}$, on h és com a molt, $\lceil r/4 \rceil$. Provem també que si existeix un vèrtex x en T , amb $|V_i(x)| \geq \sqrt{2}|V_{i-1}(x)|$, per a tot $i \geq 1$ amb $|V_i(x)| \neq \emptyset$, on $V_i(x)$ és el conjunt de vèrtexs a distància i de x , aleshores T descomposa $K_{2n,2n}$. També s'obté aquest resultat quan l'arbre base de T (obtingut a partir de T eliminant les seves fulles) és *bigraceful*, o si el nombre de fulles és prou gran.

- EDUARDO A. CANALE BETANCOURT va llegir la seva tesi, dirigida per José Gómez Martí i Xavier Muñoz López, titulada *Estudio y construcción de estructuras topológicas idóneas para la modelización de redes de interconexión*, el dia 24 d'abril de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquesta tesi s'estudia el problema grau-diàmetre, o problema (Δ, D) (es llegeix problema «Delta-De»), sorgit de l'intent de dissenyar topologies eficients per a xarxes d'interconnexió en circuits d'integració a molt gran escala. Consisteix a trobar el màxim nombre de vèrtexs que pot tenir un graf amb grau màxim Δ i diàmetre D fixos. Hem organitzat la tesi en nou capítols més un amb les conclusions. Els primers dos capítols són una introducció i un repàs dels conceptes i resultats bàsics de la teoria de grafs. La resta dels capítols està dividit en dues parts, una per a dígrafs i l'altra per a grafs.

La primera part consta de quatre capítols (el 3, 4, 5 i 6). Els primers tres tracten del problema en el context dels dígrafs unilateralment connexos, és a dir, aquells per als quals entre dos vèrtexs existeix un camí dirigit que els uneix sense importar el vèrtex origen i el final. L'últim capítol tracta el problema per a dígrafs quan es considera com grau la suma dels graus de sortida i d'entrada. En el capítol 3 s'estableixen cotes superiors a l'estil de Moore, tant per al cas general com per al cas bipartit, i per a p -cicles generalitzats. Millorem aquestes cotes per a dígrafs amb grau d'entrada i sortida 2 i diàmetre unilateral 2, i per a p -cicles generalitzats amb diàmetre unilateral p senar. Trobem dígrafs de Moore per al cas de dígrafs bipartits amb diàmetres unilaterals 2 i 3. En el capítol 4

establím cotes inferiors per a dígrafs amb grau i diàmetre unilateral fixos i petits, usant diferents tècniques com la dels dígrafs de voltatge, dígrafs producte, unió de cicles i duplicació de vèrtexs. En el capítol 5 donem cotes inferiors que són asimptòticament millors que les conegudes fins ara, quan el grau tendeix a infinit i el diàmetre unilateral roman fix. També estudiem el comportament de l'operador línia en el context unilateral. En el capítol 6 resollem una conjectura proposada per S. Perennes per a p -cicles generalitzats, per a dígrafs bipartits amb diàmetre unilateral senar o amb diàmetre unilateral parell i multigraf subjacent regular.

La segona part consta de tres capítols més (el 7, 8 i 9). En el capítol 7 relacionem els grafs de Moore de diàmetre 2 amb els quadrats llatins. En particular, establím una condició necessària per a l'existència de grafs de Moore de diàmetre 2 en termes de l'existència de certs conjunts especials de quadrats llatins que anomenem *quasiortogonals*. En el capítol 8 presentem un nou mètode per a expandir els grafs de De Bruijn i Kautz mitjançant l'eliminació de conjunts superflus d'arestes (aquelles l'eliminació de les quals no augmenta el diàmetre) i l'addició de nous vèrtexs i noves arestes preservant el grau màxim i el diàmetre. El nombre de vèrtexs afegits al graf de Kautz, per a graus màxims majors que 4, és exponencial en

el diàmetre. Donem taules amb cotes inferiors per al cardinal dels conjunts superflus d'arestes així com per al nombre de vèrtexs que poden ser addicionats. Finalment, en el capítol 9, demostrarem que per a diàmetres majors que cert valor

i per a una infinitat de valors del grau màxim, existeixen grafs amb grau màxim Δ , diàmetre D i ordres majors que $(\Delta/\alpha)^D$, on α és una constant menor que 2.

- **FREDERIC GABERN GUILERA** va llegir la seva tesi, dirigida per Àngel Jorba Monte, titulada *On the dynamics of the Trojan asteroids*, el dia 29 d'abril de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



Els asteroides troians estan formats per dos grups d'asteroides que giren al voltant del Sol seguint l'òrbita de Júpiter. Un dels dos grups precedeix el moviment del planeta en uns 60 graus i l'altre el segueix també a uns 60 graus. Aquests dos grups d'asteroides s'organitzen en l'espai al voltant de dos punts que es coneixen com a *punts triangulars* (o de Lagrange) del sistema Sol-Júpiter. L'objectiu d'aquesta tesi doctoral és aprofundir en les propietats dinàmiques del seu moviment i en l'estudi de la seva estabilitat.

Una part dels resultats coneguts per aquest problema utilitzen, com a model per a la dinàmica, el problema restringit de tres cossos. Aquest model presuposa que tant Júpiter com el Sol són masses puntuals que es mouen en una òrbita circular al voltant del seu centre de masses (seguint les lleis de Kepler), i que el moviment de l'asteroide queda determinat per les atraccions gravitatòries d'aquests dos cossos.

En la primera part d'aquest treball es desenvolupen i s'estudien d'altres models més complexos. En aquests models es vol recollir l'efecte de les principals perturbacions respecte al problema restringit, tals com l'efecte d'altres planetes (per exemple Saturn o/i Urà) d'una banda, i l'excentricitat de l'òrbita de Júpiter, de l'altra. Els models que es presenten es basen en el càlcul de solucions (periòdiques i quasiperiòdiques) dels problemes de 2, 3 i 4 cossos i s'escriuen com a perturbacions no autònomes del problema restringit Sol-Júpiter.

En particular, els models desenvolupats són:

- **Model bicircular coherent:** basat en una solució periòdica del problema pla de tres cossos Sol-Júpiter-Saturn. S'escriu com a perturbació dependent del temps periòdicament del restringit Sol-Júpiter i es tracta del model restringit (coherent) de quatre cossos

més senzill.

- **Model restringit el·líptic:** basat en una òrbita excèntrica kepleriana del problema de dos cossos Sol-Júpiter. Aquest és un model ja clàssic, però es presenta escrit de manera diferent a l'habitual. La raó de la seva inclusió en el treball és que es tracta també d'un model periòdic, però que conté una ressonància, cosa que afegeix aspectes nous a la dinàmica.
- **Model bianular:** basat en una solució quasiperiòdica de dues freqüències sobre un tor invariant del problema de tres cossos Sol-Júpiter-Saturn, on s'intenta simular de manera més realista el moviment de Júpiter.
- **Model tricircular coherent:** basat en una solució quasiperiòdica de dues freqüències sobre un tor invariant del problema de quatre cossos Sol-Júpiter-Saturn-Urà. D'alguna manera, aquest model pot ser vist com el model restringit (coherent) de cinc cossos més senzill i una continuació natural del bicircular coherent a l'afegir al sistema un cos massiu més.

L'estudi de la dinàmica d'aquests models es basa en eines semianalítiques, tals com el càlcul de formes normals truncades i d'integrals primeres aproximades. L'aspecte més nou de l'aplicació d'aquestes tècniques és l'implementació de la reducibilitat simplèctica de la part lineal d'aquests sistemes dependents del temps (periòdica o quasiperiòdicament). Una altra aplicació important és el càlcul de zones d'estabilitat efectiva, és a dir, zones on una partícula es manté, com a mínim, un temps igual a l'edat del sistema solar.

L'última part de la tesi es dedica a realitzar un estudi numèric de les propietats dinàmiques de les òrbites dels asteroides troians en un model «realista». Com a model realista escollim

un model àmpliament utilitzat pels astrònoms a l'hora de fer estudis numèrics de la dinàmica de petits cossos (asteroides), l'anomenat *sistema solar extern* o *OSS* (de les inicials en anglès). Es tracta del problema de N-cossos format pel Sol, Júpiter, Saturn, Urà, Neptú i l'asteroide. Aquest estudi està basat en l'anàlisi de freqüències de les òrbites dels troians produïdes en llargues integracions (al voltant de cinc milions d'anys). Per tal de realitzar de manera acurada aquestes integracions numèriques sobre intervals de temps tan grans, s'usa un integra-

dor simplèctic.

Aquesta tesi pot ser vista com el principi d'un projecte a llarg termini que té com a objectiu omplir el buit que hi ha entre desenvolupaments teòrics sobre estabilitat de sistemes hamiltonians i el càlcul numèric d'òrbites regulars. El fi últim és el de calcular solucions quasiperiòdiques per un asteroide troià en un model realista i, mitjançant resultats teòrics semblants als usats en els models senzills, concloure'n la seva estabilitat per un temps de vida estimat de l'edat del sistema solar.

- LAMBERT JORBA JORBA va llegir la seva tesi, dirigida per Ernest Gardeñes Martín, titulada *Intervals de marques*, el maig de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

Les escales numèriques, tant de lectura/escriptura com les de càlcul, presenten una ambigüetat morfològica donada pel fet que obliguen a considerar exactes, és a dir, puntuals, valors que en realitat no ho són. A la vegada, a causa del fet que el nombre de xifres d'aquestes escales és sempre limitat, acostuma a succeir també que el valor que en aquestes hi representem, no coincideix amb l'hipotètic valor exacte al que volem senyalar.

Al treballar en escales numèriques seria més correcte referir-nos a zones de punts en les que els nombres reals que hi pertanyen són indiscernibles entre si respecte de l'escala en la que treballem. Són precisament aquestes zones de indiscernibilitat les que ens condueixen cap al concepte de marca numèrica en una escala digital.

La marca és un ens que portarà associat un interval improp, però en el que la seva constitució anirà més enllà de la pura noció intervalar. Així parlarem de tolerància, granularitat i també dels elements que determinen l'escala numèrica, com són el nombre de dígit i la base en la que els expressem.

La marca sobre una escala digital DI_n és un objecte que representem per $\langle c, t, g, n, b \rangle$ on

- $c \in DI_n$ és el centre de la marca
- $t \in]0, 1[$ n'és la tolerància tècnica, valor que ens indica la més gran separació relativa entre punts indiscernibles de la marca i el seu centre.
- $g \in]0, 1[$ és la granularitat tècnica, nombre

que és admissible com a unitat de mesura de la tolerància.

- $n \in N$ és el nombre de dígit fraccionaris de la mantissa de l'escala DI_n
- b és la base de l'escala digital DI_n .

Imposem que $1 > t > g \geq b^{-n}$ perquè la marca tingui sentit.

El conjunt de les marques amb tolerància t i pas digital b^{-n} sobre una escala digital DI_n el simbolitzem per $M(t, n, b)$, on els elements t, n i b constitueixen el tipus de la marca. Conegut el tipus d'una marca, aquesta queda determinada indicant només el centre i la granularitat $\langle c, g \rangle$.

Una marca $X = \langle c, g \rangle \in M(t, n, b)$ defineix implícitament uns intervals entre els que destaquem l'interval associat a X , $Iv(X) = c * (1 \pm t) = c * [1 + t, 1 - t]$ i l'ombra externa de X , que representem per $Exsh(X)$ i que definim com $Iv(X) * prop(1 \pm g)$. Es complirà la inclusió modal $Exsh'(X) \subseteq Iv'(X)$.

La marca porta associada, doncs, l'interval improp $Iv(X)$, i quan sigui convenient tractar-la com a conjunt, ens referirem a l'interval $prop(c * (1 \pm t))$ com l'interval d'indiscernibilitat de X , que es representa per $Ind(X)$. Al referir-nos a punts reals de $Ind(X)$ ho farem com a lectures de X .

El quocient g/t constituirà l'índex d'imprecisió de la marca i el seu complement a ú és el que anomenaríem *índex de validesa*.

La construcció d'aquest nou ens comporta que haguem de construir també les corresponents relacions entre marques que voldrem

que calquin les relacions entre nombres reals. Tindrà sentit, doncs, parlar de relacions d'igualtat i de desigualtat entre marques, però no de relacions d'inclusió. Les relacions entre marques es definiran quan les marques a relacionar siguin comparables (tinguin la mateixa tolerància i vinguin expressades en la mateixa base). Sota aquest supòsit es defineixen les relacions entre marques des de dos punts de vista: el material, que defineix la relació a partir de la mateixa relació (de nombres reals) entre els centres, i el paramètric que hom podria erròniament creure que és un concepte *fuzzy*.

En tot càlcul entre marques acostumarà a haver-hi una pèrdua de significació que es reflecteix sobre la granularitat del resultat. Per donar homogeneïtat al sistema, dades i resultats hauran de pertànyer al mateix tipus. Els valors puntuals caldrà reconvertir-los a marca i

aquesta reconversió representaria l'operació de mesura que caldria fer per a obtenir un valor efectiu experimental a partir d'un valor analític. La tesi estudia els operadors elementals de marques associats a una funció $f: R^2 \rightarrow R$ contínua i posteriorment en fa l'extensió a qualsevol funció racional i contínua $f: R^k \rightarrow R$. per la que es fa també el corresponent estudi de la seva interpretació semàntica.

Les marques i la seva utilització dins del camp intervalar modal (els anomenats *interval·ls de marques*) solucionen diversos problemes com són el de la truncació, el de la doble modalitat d'una mateixa variable en una mateixa funció i el de permetre de treballar amb les operacions lineals intervalars, fet que fins ara era inviable si no es feia des d'una aritmètica exacta, ja que el problema de les truncacions en el context lineal no estava resolt.

- GRACIELA BENZAL va llegir la seva tesi, dirigida per Amadeu Delshams i Anna Sastre, titulada *Modelización y simulación matemática de procesos de recuperación de metales de aguas residuales mediante membranas líquidas soportadas en configuración de fibra hueca*, el dia 25 de juny de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquesta tesi en matemàtica aplicada consisteix en l'aplicació de la metodologia dels sistemes dinàmics a processos químics de recuperació de metalls mitjançant membranes líquides suportades, per la qual cosa aquesta tesi té un caràcter clarament interdisciplinar. Les membranes líquides suportades constitueixen una nova tecnologia, que permet l'enriquiment o la separació de components, de manera selectiva, a partir de barreges gasoses o dissolucions. Una alternativa per a millorar l'efectivitat de la teoria de separació consisteix en la utilització d'un líquid immiscible com a membrana que actua com a barrera semipermeable entre dos líquids o gasos que contenen les espècies a separar. D'aquí ha sorgit la tecnologia de separació mitjançant membranes líquides suportades, que en la nomenclatura internacional es denominen amb les sigles SLM (*supported liquid membrane*).

Des d'un punt de vista aplicat, la investigació de les membranes líquides suportades té múltiples aplicacions, tant en l'àmbit de laboratori com d'aplicació en distints camps, entre els

quals es poden destacar, la indústria, la biomedicina i el tractament d'aigües residuals, entre d'altres.

L'objectiu principal de la tesi és trobar un model matemàtic que descriu la dinàmica del transport i la selectivitat de metalls mitjançant les membranes líquides suportades, tant en configuració plana FSSLM (*flat sheet support liquid membrane*), com en configuració de mòdul de fibres buides HFSLM (*hollow fiber supported liquid membrane*). Després, a partir del model proposat, simular els resultats obtinguts mitjançant algorismes computacionals, a fi de comparar els resultats teòrics amb els experimentals i estudiar-ne la validesa. Finalment, analitzar la influència de les principals variables d'interès i interpretar els paràmetres que s'obtenen a partir de la solució analítica del model matemàtic proposat per a ambdues configuracions.

En aquesta tesi es proposa un model matemàtic en estat no estacionari per a l'evolució de la concentració de metall en les diferents fases d'una SLM. Es dedueix, a més, una expressió matemàtica per a la concentra-

ció de l'espècie responsable del transport, que explica la dinàmica del transport del metall, des del temps inicial fins a l'estat estacionari. D'altra banda, el model proposat té en compte la cinètica de les reaccions químiques, a partir de la qual s'obtenen punts d'equilibris i paràmetres que controlen la velocitat del procés de transport. Mitjançant la simulació implementada a través d'un algorisme computacional s'analitza la dinàmica del transport en les diferents fases i es comprova la validesa del model mitjançant dades experimentals. Tots els resultats obtinguts a partir de la modelització s'interpreten des del punt de vista químic.

A partir dels resultats teòrics obtinguts, sense necessitat de recórrer a l'experimentació,

és possible estimar el percentatge de metall, coneixent la concentració inicial de metall i el valor del punt d'equilibri que representa la concentració del metall en l'estat estacionari.

Per a les membranes líquides suportades en configuració de mòdul de fibres buides, a partir de la modelització s'ha obtingut una relació simple entre els cabals responsables del transport. En aquesta relació intervenen tant paràmetres difusionals, com els coeficients de difusió de les fases aquoses, així com factors geomètrics del mòdul de fibres buides que vénen especificats de fàbrica. Es proposa així l'aplicació d'aquesta relació de cabals en el disseny d'una futura experimentació.

- LAURA PRAT va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Mateu i Joan Verdera, titulada *Capacitat analítica i nuclis de Riesz*, el dia 26 de juny de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona

En aquesta tesi estudiem diverses qüestions relatives a la capacitat natural γ_α associada al nucli vectorial de Riesz $x/|x|^{1+\alpha}$ a \mathbb{R}^n , amb $0 < \alpha < n$. Aquesta capacitat es pot entendre com una versió real multidimensional de la capacitat analítica. La noció de capacitat analítica va ser introduïda per Lars Ahlfors el 1947 per estudiar singularitats evitables de funcions analítiques i acotades.

La primera cosa que cal observar és que si un conjunt té dimensió de Hausdorff més gran que α , llavors la seva capacitat γ_α és positiva. En canvi, si la dimensió del conjunt és més petita que α , llavors la seva capacitat γ_α és zero. Per tant, l'estudi es restringeix als conjunts α -dimensionals.

Un fet interessant que hem establert, és que el comportament de γ_α depèn del fet que α sigui enter o no. Si α és enter, existeixen con-

junts amb mesura de Hausdorff α finita i capacitat γ_α positiva. En canvi, aquest no és el cas quan $0 < \alpha < 1$. Les tècniques que usem no s'estenen per índexs $\alpha > 1$, però en aquest cas obtenim el resultat si ens restringim a conjunts Ahlfors-David regulars de dimensió α , és a dir, els conjunts Ahlfors-David regulars de dimensió no entera $\alpha > 1$ tenen capacitat γ_α nul·la.

Per $0 < \alpha < 1$, demostrem que la capacitat γ_α és comparable a la ben coneguda capacitat de Riesz $C'_{\frac{2}{3}(n-\alpha), \frac{3}{2}}$, de la teoria del potencial no lineal. Aquesta descripció de γ_α , $0 < \alpha < 1$, és realment sorprenent, tenint en compte que el nucli que defineix aquesta capacitat de Riesz és positiu a diferència del que defineix la γ_α . Amb les tècniques que utilitzem per demostrar aquest resultat es pot deduir que la capacitat γ_α és numerablement semiadditiva i és un invariant bilipschitz quan $0 < \alpha < 1$.

- GLÒRIA MATEU I FIGUERAS va llegir la seva tesi, dirigida per Vera Pawlowsky Glahn i Carles Barceló i Vidal, titulada *Sistemas de control predictivo en canales de riego: Formulación y simulación numérica*, el dia 10 d'octubre de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Les dades composicionals són vectors els components dels quals representen proporcions respecte d'un total, i per tant estan sotmesos a la restricció que la suma dels seus components és una constant. L'espai natural per a vectors amb D components és el símplex SD. En l'àmbit de la modelització, ens trobem amb una gran dificultat: no coneixem prou classes de distribucions que permetin modelitzar adequadament la majoria dels conjunts de dades composicionals.

En els anys vuitanta, Aitchison proposa una metodologia per treballar amb dades composicionals que hem anomenat *metodologia MOVE*, ja que es basa en transformacions. En el tema específic de la modelització, Aitchison utilitza la transformació logquocient additiva per projectar les composicions a l'espai real i posteriorment les modelitza amb una distribució normal. D'aquesta manera introdueix la distribució normal logística additiva. Tot i les bones propietats algebraïques que presenta aquesta distribució ens trobem amb dues dificultats: el model normal no pot modelitzar alguns conjunts de dades transformades, especialment quan presenten una certa asimetria. Per altra banda, aquesta família de distribucions no és tancada respecte de l'amalgama (o suma) de components.

El 1996 Azzalini i Dalla-Valle introdueixen la distribució normal asimètrica a RD. Es tracta d'una generalització del model normal amb un paràmetre de manera que regula l'asimetria de la distribució. Utilitzant la teoria de les transformacions i la distribució normal asimètrica, hem definit una nova distribució que hem anomenat *normal asimètrica logística additiva*. Aquesta és especialment indicada per modelitzar conjunts de dades composicionals amb un biaix moderat, i consegüentment ens aporta la solució a una de les dificultats de la distribució normal logística additiva. Estudiant amb més detall aquest nou model, hem comprovat que presenta unes bones propietats algebraïques. D'altra banda, i mitjançant simulacions, hem pogut il·lustrar l'efecte que tenen

els paràmetres de la distribució normal logística additiva inicial en la distribució de l'amalgama i hem pogut comprovar que, en certs casos, el model normal asimètric proporciona un bon ajust per al logquocient de l'amalgama.

Una eina útil en la modelització de vectors aleatoris són els tests de bondat d'ajust. Malauradament, no és gens freqüent trobar a la literatura tests de bondat d'ajust aplicables a la distribució normal asimètrica. Així doncs, hem desenvolupat uns tests per aquesta distribució i hem realitzat un estudi de potència utilitzant diverses distribucions alternatives. La metodologia que hem escollit és la D'Agostino i Stephens que consisteix a mesurar la diferència entre la funció de distribució empírica (calculada mitjançant la mostra) i la funció de distribució teòrica (la normal asimètrica).

L'estructura d'espai euclidià del símplex ens ha suggerit una nova metodologia que hem anomenat STAY, ja que no es basa en les transformacions. Sabem que és equivalent utilitzar les operacions pròpies de SD que aplicar les operacions de l'espai real a les coordenades de les composicions respecte d'una base ortonormal. Sobre aquestes coordenades hem definit el model normal i el model normal asimètric a SD i hem realitzat un estudi comparatiu amb els models normal logístic additiu i normal asimètric logístic additiu. Si bé en determinades situacions aquesta nova metodologia dóna resultats totalment equivalents als obtinguts amb la tècnica de les transformacions, en altres aporta canvis importants. Per exemple, ha permès expressar directament sobre el símplex conceptes bàsics de l'estadística clàssica, com el concepte d'esperança o de variància. Atès que no existeixen treballs previs en aquesta direcció, proposem un exemple il·lustratiu en el cas univariànt. Sobre les coordenades respecte d'una base unitària, hem definit el model normal a R^+ i hem realitzat una comparació amb el model *lognormal* obtingut mitjançant la transformació logarítmica.

- BELÉN PALOP DEL RÍO va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran Hurtado, titulada *Algorithmic problems on proximity and location under metric constraints*, el dia 21 de novembre de 2003. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya.

La proximitat és un dels conceptes més importants en geometria computacional: donat un conjunt finit de punts al pla, es calcula i s'estructura alguna relació de proximitat entre aquests. Una de les eines més potents per a aquest estudi és el diagrama de Voronoi. Els diagrames de Voronoi no només serveixen per classificar punts del pla respecte d'un conjunt de llocs, sinó que també codifiquen la relació entre els llocs mitjançant la seva estructura dual, la triangulació de Delaunay.

Quan introduïm una xarxa de transport al pla, convé interpretar la noció de proximitat en termes del temps que cal invertir per fer un desplaçament. Anomenem *mètriques temporals* les distàncies induïdes per xarxes de transport. La mètrica temporal induïda depèn de la xarxa considerada. Si la mètrica que considerem és prou complicada, problemes tan bàsics com ara trobar el camí més curt per anar d'un lloc a un altre requereixen algorismes difícils d'implementar i, generalment, poc eficients.

En el treball presentat, a algunes xarxes permeten d'accedir-hi en qualsevol dels seus punts (model continu); a d'altres, els viatgers disposen d'una sèrie de nodes especials per accedir-hi (model discret). Depenent del comportament de cadascuna de les mètriques induïdes, podrem donar algorismes que calculin en temps òptim el diagrama de Voronoi proper o llunyà i resoldre altres problemes.

En el model continu, hem començat amb el cas més senzill possible: una recta. Per a aquesta recta on els viatgers poden moure's amb una velocitat fixada, diferents problemes clàssics de la geometria computacional han pogut ser resolts. Per exemple, s'han donat algorismes per calcular els diagrames de Voronoi propers i llunyans,

així com per trobar la parella de punts més propera dins d'un conjunt en temps òptim. També ha estat objecte d'estudi el càlcul de l'envolupant convexa, per a la qual es dona un algorisme d'ordre quadràtic. Amb aquests resultats, demostrem que les mètriques agradables, tot i el seu bon comportament per al càlcul del diagrama de Voronoi, poden presentar dificultats quan es tracta de calcular altres estructures.

Sobre el model continu s'han estudiat d'altres xarxes de transport, com dues semirectes coincidents a l'origen o una xarxa circular, arribant a mètriques temporals que no comparteixen les bones característiques de la primera. Però la complexitat del model es pot augmentar molt més afegint una senzilla restricció al moviment dels usuaris de la xarxa: suposar que els recorreguts esdevenen en un entorn com per exemple l'Eixample de Barcelona, on només dues direccions ortogonals són permeses. D'aquesta manera, si la mètrica fora de la xarxa és la L1, podem arribar a calcular el diagrama de Voronoi proper per a un conjunt de punts en temps òptim, donada una xarxa isotètica amb qualsevol nombre constant de segments.

Els problemes d'ubicació de serveis també poden generalitzar-se a d'altres mètriques diferents de l'euclidiana. En aquest treball, ens centrem en un cas particular del model continu, on la velocitat de desplaçament sobre una recta fixada és major que a la resta del pla. Donem solucions per als problemes de l'1 i el 2-centre quan el servei ha d'estar dins la pròpia xarxa. En el cas euclidià, també treballem sobre una nova versió del problema del 2-centre i, amb determinades restriccions, calculem els dos centres per a dos conjunts separables de punts.

- JAVIER J. GUTIÉRREZ MARÍN va llegir la seva tesi, dirigida per Carles Casacuberta Vergés, titulada *Localización y conservación de estructuras en homotopía estable*, el dia 10 de setembre de 2004. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.



La localització és una tècnica ben coneguda en àlgebra commutativa i geometria algebraica. Moltes de les propietats formals de les localitzacions de mòduls són compartides per altres transformacions de naturalesa semblant definides en altres contextos. Aquest fet ha conduït

a una axiomatització del concepte de functor de localització en categories arbitràries, amb una terminologia similar a la de l'àlgebra.

La implementació de la localització en topologia algebraica va tenir les seves arrels en els treballs de Serre i Adams, i es va començar

a formalitzar principalment gràcies a les contribucions de Sullivan i Quillen. Les localitzacions homològiques van ser la via principal de transport a l'homotopia estable, així com l'eina principal per al càlcul dels grups d'homotopia estables de les esferes durant molts anys.

En les dues últimes dècades ha anat augmentant cada vegada més l'ús de tècniques de l'àlgebra commutativa en homotopia estable. La teoria d'homotopia estable se centra en l'estudi dels espectres i captura una part essencial de les propietats homotòpiques dels espais, prescindint dels fenòmens peculiars que es donen en dimensions concretes. El tractament axiomàtic de la categoria estable fent servir el llenguatge de categories de models i categories triangulades ha donat lloc a noves categories estables, com la categoria dels espectres simètrics o la categoria dels S -mòduls, que permeten traslladar fidelment diverses tècniques i construccions de l'àlgebra commutativa a la categoria estable, i treballar amb «espectres anell» i «espectres mòdul» de la mateixa manera que amb el seus anàlegs algebraics.

L'objectiu principal d'aquesta memòria és l'estudi dels functors de localització en homotopia estable, centrant-nos fonamentalment en les estructures algebraiques que es conserven sota l'acció d'aquests functors. Un dels resultats centrals d'aquest treball estableix que, sota hipòtesis apropiades, els functors de localització en la categoria homotòpica estable transformen espectres anell en espectres anell, i espectres mòdul sobre un anell en espectres mòdul sobre el mateix espectre anell (o fins i tot sobre el localitzat d'aquest espectre). Com a conseqüència d'aquest fet s'obté que les localitzacions conserven els GEM estables, i que la localització d'un espectre d'Eilenberg-Mac Lane té com a màxim

dos grups d'homotopia no trivials en dimensions consecutives. També es caracteritzen les localitzacions de l'espectre d'Eilenberg-Mac Lane associat a l'anell dels enters, que tenen un sol grup d'homotopia no nul amb estructura d'anell rígid. Aquest fet demostra l'existència d'una classe pròpia de functors de localització no equivalents.

Aquests i altres resultats recents en teoria de localització tracten de la conservació d'estructures sota l'acció de les localitzacions. Algunes d'aquestes estructures es poden incloure dins del marc més general d'àlgebres sobre opèrades. Les opèrades són objectes que codifiquen estructures algebraiques. Van ser utilitzades a principis dels anys setanta com a eines en teoria d'homotopia per a l'estudi dels espais de llaços iterats. L'estudi de les opèrades en categories monoidals simètriques va permetre importants aplicacions en àlgebra, topologia i física.

En la darrera part de la memòria tractem sobre la conservació per functors de localització d'estructures definides com a àlgebres sobre opèrades en una categoria de models simplícis i monoidal simètrica. Aquestes estructures inclouen els espais de llaços i els espectres anell estrictes. El principal resultat d'aquesta part estableix que en una categoria de models monoidal, els functors de localització conserven les estructures d'àlgebres sobre opèrades simplícis cofibrants. Aquest resultat demostra que la localització d'un espai de llaços és homotòpicament equivalent a un espai de llaços i que la localització d'un espectre anell (estricte) és homotòpicament equivalent a un espectre anell (estricte) quan el functor de localització commuta amb la suspensió.